

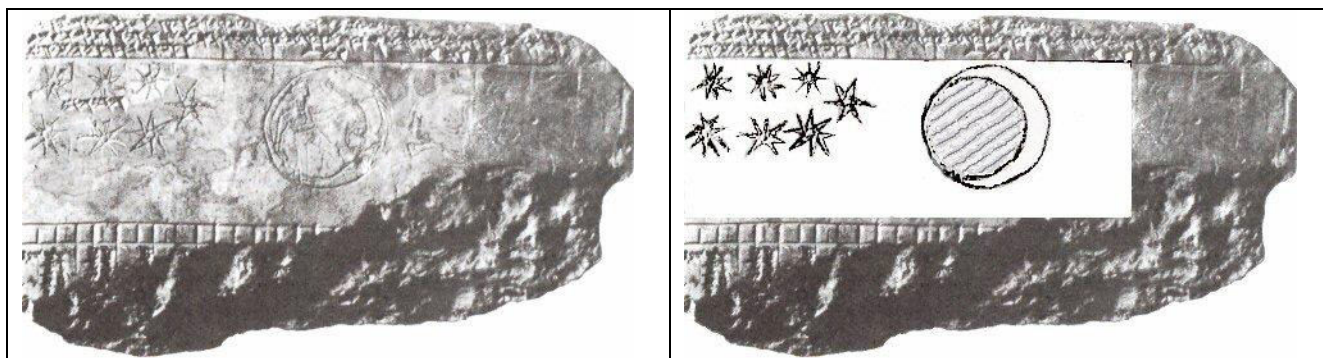
IX НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО АСТРОНОМИЯ

<http://astro-olymp.org>

II кръг - решения
19 февруари 2006 г.

Ученици от 11-12 клас

1 задача. Първите астрономически текстове, достигнали до нас, са от началото на второто хилядолетие преди новата ера и са написани върху глинени плочки. На една от тези глинени плочки е нарисувано астрономическо явление, което е направило впечатление на древните астрономи – Луната малко преди да премине пред Плеядите. Ако това събитие наистина се е случило преди 4000 години, то през коя част от денонощието бихме го наблюдавали? Кога през годината би било това?



Решение:

Луната е нарисувана като тънък сърп с изпъкнала страна, обърната надясно. Така изглежда тя няколко дни след новолуние. Слънцето се намира на неголямо видимо ъглово разстояние още по-надясно (западно) от нея. Тъй като се виждат и Плеядите, то очевидно Слънцето е залязло и Луната се наблюдава над западния хоризонт в ранните вечерни часове.

Поради обикалянето на Луната около Земята, Луната извършва видимо движение на фона на звездите от запад на изток с период около 27 денонощия (сидеричен месец). Възрастта на Луната, както е изобразена на плочката, е 3-4 дни след новолуние. Следователно Слънцето е изостанало на около един и половина или два зодиакални знака западно от Луната. Луната е близо до звездния куп Плеяди, който е в границите на съзвездието Бик. Можем да предположим в такъв случай, че Слънцето се намира примерно в Риби. Зодиакалният знак Риби съответства на края на февруари – март. Така е съгласно астрологическата традиция. Но тя датира от преди 2000 години. Тогава в края на февруари – март Слънцето наистина е било в Риби. Но преди 4000 години, или още 2000 години по-рано, в същия месец от годината Слънцето не би било в Риби, а на изток от Риби. Това е поради прецесията на земната ос. Величината на изместването можем да преценим приблизително, като имаме предвид, че периодът на прецесия е 26 000 години. Две хиляди години са $1/13$ от този период, зодиакалните съзвездия са 12, което означава, че изместването ще бъде с около едно зодиакално съзвездие. Можем да заключим, че Слънцето тогава през март е било в съседното на Риби съзвездие на изток, т.е. в Овен, а в Риби е било през предния месец февруари. Следователно явлението е трябвало да се наблюдава от древните астрономи приблизително през февруари (както и да са наричали те този месец тогава).

2 задача. В III век преди новата ера се смятало, че Слънцето извършва годишно движение на фона на звездите по кръгова орбита около Земята, като при това движението му е равномерно. За да обясни наблюдаваната различна продължителност на четирите годишни времена, математикът Аполоний предположил, че Земята не е точно в центъра на слънчевата орбита, а Хипарх дори изчислил какво трябва да е отместването.

Опитайте се да повторите разсъжденията на Хипарх. Пресметнете с колко процента от радиуса на слънчевата орбита трябва да е отместена Земята от нейния център.

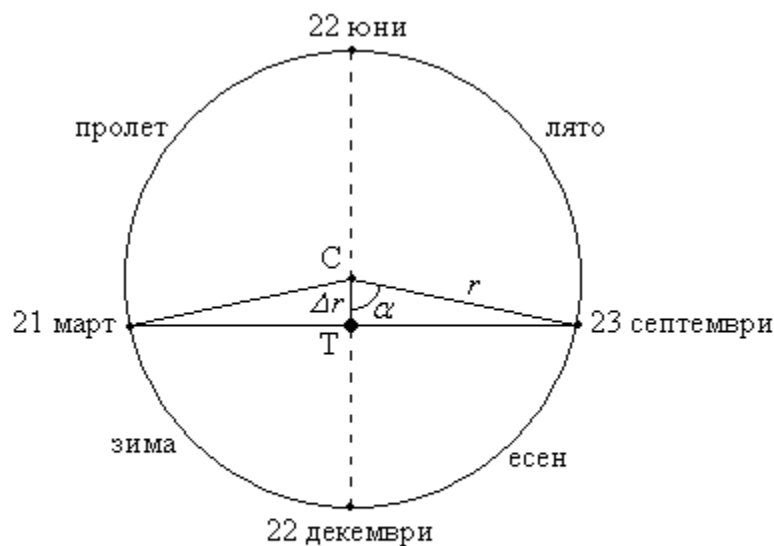
Решение:

Астрономическата пролет започва на 21 март, лятото – на 22 юни, есента – на 23 септември, а зимата – на 22 декември. Това са средни дати, като действителните дати за всяка година могат да варират с един-два дни около тях, в зависимост от това колко години са изминали от последната високосна година. Приемаме, че в годината има 365 дни. Можем да пресметнем, че различните сезони имат приблизително следната продължителност:

пролет	93 дни	лято	93 дни
есен	90 дни	зима	89 дни

Според древногръцките представи, за една година Слънцето прави една обиколка на фона на неподвижните звезди по кръговата си орбита около Земята, като се движи равномерно.

За начален момент на пролетта се счита моментът, когато Слънцето застане относно Земята в положение, при което земната ос е ориентирана спрямо Слънцето така, че терминаторът на Земята (линията, разделяща осветената част на земното кълбо и неосветената) да преминава през двата земни полюса. За земния наблюдател това става, когато Слънцето преминава през пролетната равноденствена точка – една от пресечните точки на небесния екватор с еклиптиката. Съответно есента започва, когато отново Слънцето застане относно Земята в подобно положение, но на противоположната страна на слънчевата орбита спрямо Земята. Това става, когато Слънцето преминава през есенната равноденствена точка, която е другата пресечна точка на небесния екватор с еклиптиката. Тъй като равноденствените точки са противоположни една на друга върху небесната сфера, то Земята трябва да лежи на правата, която ги свързва.



C - център на слънчевата орбита
T - изместено положение на Земята

Лятото в северното полукукло на Земята започва, когато земната ос е ориентирана спрямо Слънцето така, че Северният полюс да е най-добре огрят от него (за наблюдател на Северния полюс Слънцето да е в горна кулминация – най-високо над хоризонта). Това е точката на лятното слънцестоене. От прости геометрични съображения следва, че тази точка трябва да е в средата на дъгата от окръжността между началото на пролетта и началото на есента. Аналогично началото на зимата – точката на зимно слънцестоене – трябва да разполовява точно дъгата от другата страна на окръжността.

Както се вижда от продължителностите на сезоните, в действителност това се случва така само приблизително. Причините са в елиптичността на земната орбита, неравномерното движение на Земята по нея и несъвпадението на моментите на преминаване през перихелий и афелий с моментите съответно

на зимно и лятно слънцестоене. Но все пак можем да приемем, че в древногръцкия модел Земята лежи приблизително в средата на хордата от кръговата слънчева орбита, която свързва пролетната и есенната равноденствени точки. Тази хорда дели окръжността на две неравни дъги. Нека пресметнем техните ъглови дължини. От пролетната до есенната равноденствена точка Слънцето изминава ъглово разстояние:

$$(93 + 93) \text{ дни} \times 360^\circ / 365 \text{ дни} \approx 183^\circ.45,$$

а от есенната до пролетната равноденствена точка $360^\circ - 183^\circ.45 = 176^\circ.55$.

На чертежа е представена кръговата орбита на Слънцето около Земята, като r е нейният радиус, а Δr разстоянието, с което Земята е изместена от центъра на орбитата. Ъгълът α съответства на половината от дъгата от есенната до пролетната равноденствена точка и е равен на $176^\circ.55 / 2$. За относителното изместване на Земята получаваме:

$$\frac{\Delta r}{r} = \cos \alpha$$

$$\frac{\Delta r}{r} \approx 0.03$$

Следователно Земята е изместена от центъра на около 3% от радиуса на предполагаемата слънчева орбита.

3 задача. Кое светило изгрива по-бързо, гледано от земната повърхност – Слънцето или Луната? Обяснете вашия отговор.

Решение:

Изгревите на Слънцето и Луната се наблюдават поради видимото денонощно движение на небесната сфера, което се дължи на околоосното въртене на Земята. Това, обаче, се отнася за наблюдателен пункт различен от земните полюси или техните близки околности. На полюсите или достатъчно близо до тях изгревите на Слънцето и Луната стават в резултат от видимото движение на тези два обекта на фона на звездното небе, за Слънцето – по еклиптиката, а за Луната – по проекцията на нейната околоземна орбита върху небесната сфера. Видимото годишно движение на Слънцето по еклиптиката се дължи на обикалянето на Земята около Слънцето. Видимото месечно движение на Луната на фона на звездите се дължи на обикалянето на Луната около Земята по орбита, която сключва много малък ъгъл с еклиптиката. Поради наклона на земния екватор към равнината на земната орбита около Слънцето, от всеки от земните полюси над хоризонта се вижда само половината от еклиптиката и съответно само половината от проекцията на лунната орбита върху небесната сфера. Ето защо Слънцето е над хоризонта само през половината от годината, а Луната – само половината от сидеричния лунен месец. Следователно слънчевият изгрев става веднъж годишно, а лунният – веднъж месечно. Видимото месечно движение на Луната по проекцията на нейната орбита очевидно става по-бързо, отколкото годишното движение на Слънцето по еклиптиката. Затова и изгревът на Луната на земните полюси става по-бързо, отколкото изгрева на Слънцето.

За да анализираме по-точно продължителността на изгревите на Слънцето и Луната за други наблюдателни пунктове, намиращи се достатъчно далеч от полюсите, също трябва да отчитаме годишното движение на Слънцето и месечното движение на Луната.

Видимото денонощно въртене на небесната сфера става от изток на запад. Видимото годишно движение на Слънцето по еклиптиката става от запад на изток. То е много по-бавно, но се наслажда върху видимото денонощно въртене и в резултат от това общото видимо денонощно движение на Слънцето от изток на запад се забавя. Същият ефект се наблюдава и при Луната. Нейното месечно движение на фона на звездите също е от запад на изток и също се наслажда върху денонощното въртене. Но месечното движение на Луната е по-бързо, отколкото годишното движение на Слънцето. Затова при Луната се получава по-голямо забавяне на видимото

деноношно въртене от изток на запад. Следователно за такива наблюдателни пунктове изгревът на Слънцето става по-бързо, отколкото изгрева на Луната.

Има случаи, обаче, когато последният извод не е верен дори за местата, различни от полюсите. Нека си представим, че Слънцето се намира в някоя от точките на слънцестоене – зимно или лятно. Тогава то е отдалечено на 23.5° от небесния екватор и се движи по денонощен паралел, който е кръг от небесната сфера, по-малък от небесния екватор. При денонощното въртене на небесната сфера всички паралели се въртят с еднаква ъглова скорост. Затова, когато Слънцето е върху такъв паралел, то ще се премества на ъглово разстояние, равно на един свой ъглов диаметър, за по-дълго време, отколкото ако се намира на небесния екватор. Следователно неговото видимо деноношно движение ще се извършва по-бавно. Нека предположим също, че Луната е на 90° от Слънцето и се намира върху небесния екватор и споменатият ефект не влияе върху нейното видимо деноношно движение. Дали в този случай изгревът на Луната няма да става по-бързо от изгрева на Слънцето? Ако Слънцето е на небесния екватор, ъгловата скорост на видимото му деноношно движение е $\omega_s = 360^\circ/24^h$. С използването на продължителността на слънчевото денонощие (24^h), а не на звездното (23^h56^m), тук ние вече сме отчели годишното движение на Слънцето по еклиптиката. Когато Слънцето се намира на 23.5° от небесния екватор, то скоростта на ъгловото му преместване по небето ще бъде $\omega_s' = \omega_s / \cos 23.5^\circ \approx 13^\circ.76/h$. Когато Луната е върху небесния екватор, то нейната ъглова скорост на деноношно движение ще бъде равна на разликата от видимата ъглова скорост на деноношно въртене на небесната сфера с период едно звездно денонощие (23^h56^m) и ъгловата скорост на движение на Луната около Земята с период един сидеричен месец (27.3 денонощия):

$$\omega_L = \frac{360^\circ}{23^h56^m} - \frac{360^\circ}{27^d.3 \times 24^h} \cdot \cos 23.5^\circ \approx 14^\circ.54/h$$

Умножаването на втория член в дясната страна на равенството по $\cos 23.5^\circ$ е заради това, че видимото месечно движение на Луната се извършва по еклиптиката, която в равноденствените точки е под наклон 23.5° към екватора. Тъй като в този случай Луната ще се движи видимо по небето от изток на запад по-бързо от Слънцето, то нейният изгрев също ще става по-бързо. Разглежданата ситуация не е единствената, при която Луната изгрява по-бързо от Слънцето. Това е възможно и при други конфигурации на Слънцето в определен интервал от позиции около точките на слънцестоене, а на Луната – около равноденствените точки.

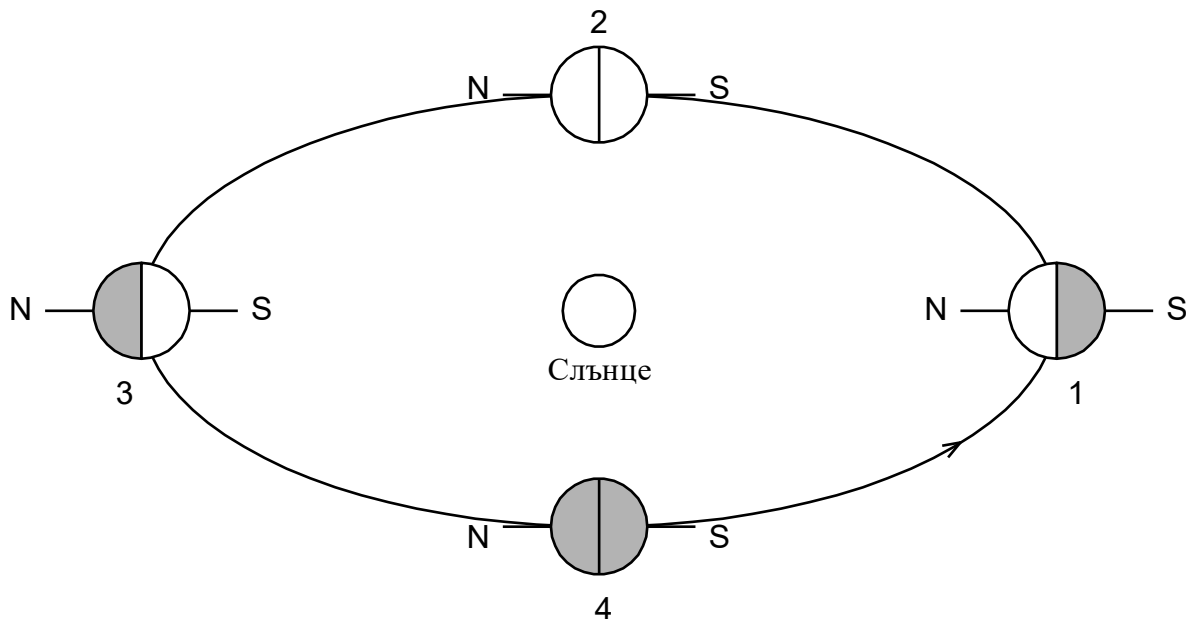
4 задача. Нека около хипотетична звезда, подобна на Слънцето, по кръгова орбита обикаля планета. В една област на тази планета живеят объркани същества. Те са объркани, защото всяка година се сблъскват със следния парадокс: През студените годишни сезони светлата част от денонощието е значително по-дълга, отколкото през топлите. Възможно ли е да се случи това? Помогнете на обърканите същества да разберат коя област на планетата обитават.

Решение:

Подобна ситуация е възможна. Нещо повече, тя дори съществува в нашата Слънчева система при планетата Уран. Нейната ос е толкова силно наклонена, че почти лежи в равнината на орбитата ѝ около Слънцето. Областта, в която би трябвало да живеят обърканите същества на подобна планета, е около нейния екватор. Топлите сезони на годината там са в периодите около равноденствията – точките 2 и 4 на фигурата. Тогава за наблюдател на екватора Слънцето преминава през зенита по пладне. Времето от изгрева на центъра на слънчевия диск до залеза му е равно на времето от залеза до изгрева. Ако отчетем също времето, през което над хоризонта се вижда макар и част от слънчевия диск, полумрака и влиянието на рефракцията (допускаме, че на планетата има атмосфера), то светлата част от денонощието ще бъде малко по-дълга от тъмната.

В периодите около слънцестоянията – точките 1 и 3 на фигурата – са най-хладните годишни сезони за жителите на екватора на планетата. Тогава там Слънцето през цялото

денонощие се намира ниско на хоризонта. По тази причина е студено, но затова пък през цялото денонощие е светло.



5 задача. В астероидната астрономия, за сравняване на фотометричните характеристики на малките планети и за предизчисляване на техния блясък, се въвежда т.нар. “абсолютна звездна величина”. Това е звездната величина на астероида, когато той се намира на една астрономическа единица (AU) от Слънцето и се наблюдава от хипотетичен наблюдател в центъра на Слънцето.

Нека абсолютната звездна величина на един астероид е 3.8^m . Каква е неговата видима звездна величина (за земен наблюдател) в опозиция, ако разстоянието от астероида до Слънцето е 2.98 AU?

Решение:

Когато астероидът е на разстояние 1 AU от Слънцето, той има звездна величина $m_a = 3.8^m$ за наблюдател в центъра на Слънцето, т.е. наблюдателят е на разстояние от астероида също 1 AU. Осветеността, която създава Слънцето върху астероида, е пропорционална на $1 / (1 \text{ AU})^2$. Осветеността E_a , която астероидът създава за наблюдател в центъра на Слънцето, е пропорционална на осветеността, създавана от Слънцето на астероида, и на $1 / (1 \text{ AU})^2$. Следователно $E_a \propto 1/(1\text{AU})^4$. На разстояние от Слънцето $r_1 = 2.98 \text{ AU}$ осветеността на повърхността на астероида е пропорционална на $1 / r_1^2$. Астероидът е в опозиция, което означава, че той се намира на разстояние от Земята $r_2 = r_1 - 1 \text{ AU}$, и че е обърнат към нас практически изцяло с осветената си страна. За осветеността, създавана от астероида на Земята, можем да напишем:

$$E_1 \propto \frac{1}{r_1^2 (r_1 - 1 \text{ AU})^2}$$

Оттук следва, че:

$$\frac{E_a}{E_1} = r_1^2 (r_1 - 1)^2$$

където r_1 се измерва в астрономически единици.

Да означим търсената звездна величина на астероида с m_1 . Съгласно формулата на Погсон в логаритмичен вид:

$$\lg \frac{E_a}{E_1} = 0.4(m_1 - m_a)$$

Оттук и от по-горното равенство получаваме:

$$\lg(r_1^2(r_1 - 1)^2) = 0.4(m_1 - m_a)$$

$$m_1 = m_a + 5 \lg r_1 + 5 \lg(r_1 - 1)$$

$$m_1 \approx 7.65^m$$

Справочни данни:

Период на прецесия на земната ос – 26 000 години